立方体の切断 練習問題5問

記事「立方体をどう切っても『正五角形』は作れない」の練習問題です

この問題について

5問ともオリジナル問題です。中学入試でよく出る4つのタイプ(切り口の形・体積・小さな立方体の個数)を、1問ずつ体験できるように作りました。答えと解説は最後のページにあります。

立方体ABCD-EFGHは、上の面がABCD、下の面がEFGHで、Aの真下にE、Bの真下にF、Cの真下にG、Dの真下にHがあります。点線は見えない辺です。

問1　タイプ1 切り口の形

立方体を1つの平面で切ったとき、切り口として作れる形をすべて選び、記号で答えなさい。

ア 正三角形　　イ 直角三角形　　ウ ひし形

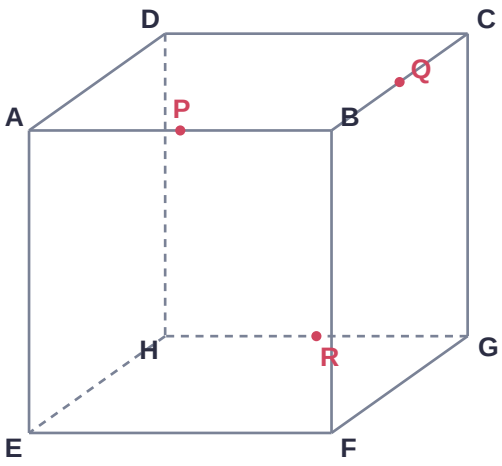
エ 正五角形　　オ 正六角形　　カ 七角形

こたえ

問2　タイプ1 切り口の形

辺ABのまんなかの点をP、辺BCのまんなかの点をQ、辺GHのまんなかの点をRとします。3点P、Q、Rを通る平面で立方体を切ったとき、切り口はどんな形になりますか。

ヒント:3点を通るからといって、三角形とは限りません。



こたえ

立方体の切断 練習問題5問

タイプ2 切って分かれた立体の体積

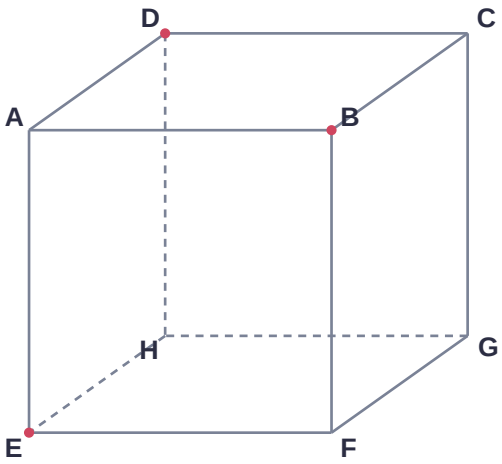
問3

タイプ2 体積

1辺が6cmの立方体を、3つの頂点B、D、Eを通る平面で切ります。

(1)切り口はどんな形ですか。

(2)頂点Aをふくむ方の立体の体積を求めなさい。



(1)こたえ

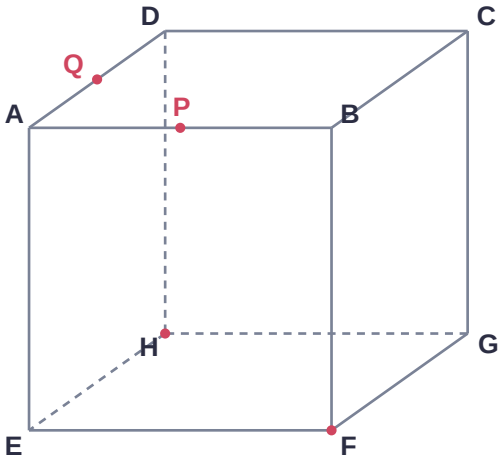
(2)こたえ

問4

タイプ2 体積(少しむずかしい)

1辺が6cmの立方体で、辺ABのまんなかの点をP、辺ADのまんなかの点をQとします。4点P、Q、H、Fを通る平面で立方体を切ったとき、頂点Aをふくむ方の立体の体積を求めなさい。

ヒント:FPとHQを上にのばすと、AEをのばした線と同じ点で交わります。大きな三角すいから小さな三角すいを引いてみましょう。



こたえ

立方体の切断 練習問題5問

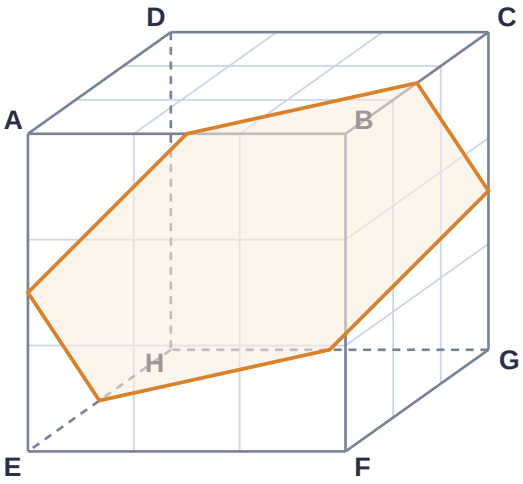
タイプ3 小さな立方体を積んだ立体を切る

問5 タイプ3 小さな立方体の個数

1辺1cmの小さな立方体を27個すき間なく積んで、1辺3cmの大きな立方体を作りました。この大きな立方体を、6本の辺(AB、BC、CG、GH、HE、EA)のまんなかの点を通る平面で切ります。このとき、切り口は正六角形になります。

切られる小さな立方体は、全部で何個ありますか。ただし、小さな立方体の辺や頂点にふれるだけのものは、切られたとは考えません。

ヒント:一度に全部を考えず、下の段・まんなかの段・上の段に分けて、1段ずつ数えましょう。



こたえ

解くときの3つのルール

ルール1 同じ面にある2点は、まっすぐ結ぶ。違う面にある2点は結ばない。

ルール2 向かい合う面には、平行な線を引く。

ルール3 結べないときは、辺を延長して「外」で交わらせる。

切り口の辺の数は、包丁が通った面の数と同じ。向かい合う面の切り口は必ず平行。この2つを思い出せば、ルールは覚えなくても使えます。

答えと解説

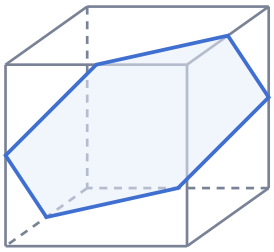
保護者の方へ:答えを言う前に「どうやって考えたか、教えて」と聞いてみてください

問1　ア・ウ・オ

七角形は、面が6つしかないので作れません。正五角形は、5つの面を切ると平行な辺が必ず2組できるので作れません。直角三角形は、角を切り落とした三角形の角がすべて90度より小さくなるので作れません。ひし形は、向かい合う2つの頂点と、2本の辺のまんなかを通るように切ると作れます。

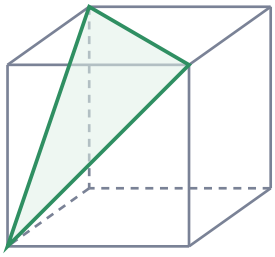
問2　正六角形

ルール1でPとQを結び、ルール2で向かい合う下の面に、PQと平行な線をRから引きます。これをくり返すと、切り口はCG、HE、EAのまんなかも通ることが分かります。6本の辺のまんなかを通るので、切り口は正六角形です。3点を通るのに、六角形になるのです。



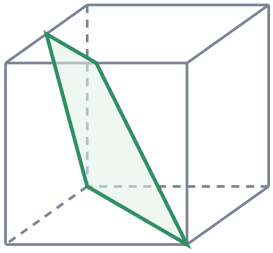
問3　(1)正三角形 (2)36cm^3

BD、DE、EBはどれも正方形の対角線なので、長さが等しく、切り口は正三角形です。Aをふくむ方は、底面が直角二等辺三角形ABD、高さがAEの三角すいなので、6×6÷2×6÷3=36(cm^3)。立方体のちょうど6分の1です。



問4　63cm^3

FP、HQ、EAをのばすと、Aの6cm上の点Oで交わります。大きな三角すいO-EFHは、6×6÷2×12÷3=72(cm^3)。小さな三角すいO-APQは辺の長さが半分なので、体積は2×2×2=8分の1で9cm^3。Aをふくむ方の立体は、72-9=63(cm^3)です。



問5　19個

1段ずつ数えると、下の段で6個、まんなかの段で7個、上の段で6個が切られます。合わせて6+7+6=19(個)。切られないのは、2つの角のまわりにある8個だけです。立体を1段ずつ「輪切り」にして考えるのが、タイプ3のコツです。